Annexe 3

Calcul des indicateurs de taux clés et de leurs répercussions croisées à l'aide de calculs

Sachant que les mesures de taux clés sont simplement des ordres de *dérivées* de la valeur calculée par rapport à la partie des taux sur la courbe, nous pouvons simplement utiliser le calcul et l'expansion de la série de Taylor pour estimer la variation de valeur après un changement appliqué à l'une des variables (taux clés).

Dans ce qui suit, f représente la valeur actualisée de ce qui est d'intérêt (généralement les flux de trésorerie ou les profits), x et y sont les taux clés, a et b sont les positions de départ des taux x et y respectivement. L'exposant +/– signifie que les taux augmentent/diminuent de h. L'indice x signifie que la dérivée de premier ordre est utilisée dans la variable x, xx fait référence à la dérivée du deuxième ordre, et xy signifie que l'impact croisé de x et y est calculé lorsque la variation de x se produit après la variation de y.

$f_x^+(a,b) = \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \frac{P_x}{h}$, cela équivaut à KRxDV01 lorsque les taux ont augmenté (directionnel)

$f_x^-(a,b) = \frac{f(a,b)-f(a-h,b)}{h} = \frac{-M_x}{h}$, cela équivaut à KRxDV01 lorsque les taux ont diminué (directionnel)

$f_x(a,b) = \frac{f(a+h,b)-f(a-h,b)}{2h} = \frac{[f(a+h,b)-f(a,b)]-[f(a-h,b)-f(a,b)]}{2h} = \frac{f_x^+(a,b)+f_x^-(a,b)}{2} = \frac{P_x-M_x}{2h}$, cela équivaut à KRxDV01 lorsque des taux à la hausse et à la baisse sont incorporés (non directionnels).

$f_y^+(a,b) = \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} = \frac{P_y}{h}$

$f_y^-(a,b) = \frac{f(a,b)-f(a,b-h)}{h} = \frac{-M_y}{h}$

$f_y(a,b) = \frac{f(a,b+h)-f(a,b-h)}{2h} = \frac{[f(a,b+h)-f(a,b)]-[f(a,b-h)-f(a,b)]}{2h} = \frac{f_y^+(a,b)+f_y^-(a,b)}{2} = \frac{P_y-M_y}{2h}$

$f_{xx}^+(a,b) = \frac{f_x^+(a+h/2,b)-f_x^+(a,b)}{h/2} = \frac{[f(a+h,b)-f(a+h/2,b)]-[f(a+h/2,b)-f(a,b)]}{h^2/4} = \frac{f(a+h,b)-2f(a+h/2,b)+f(a,b)}{h^2/4} = \frac{P_x-2P_{x/2}}{h^2/4}$, cela équivaut à KRxCV01 lorsque les taux ont augmenté (directionnels).

$f_{xx}^-(a,b) = \frac{f_x^-(a,b)-f_x^-(a-h/2,b)}{h/2} = \frac{[f(a,b)-f(a-h/2,b)]-[f(a-h/2,b)-f(a-h,b)]}{h^2/4} = \frac{f(a,b)-2f(a-h/2,b)+f(a-h,b)}{h^2/4} = \frac{M_x-2M_{x/2}}{h^2/4}$, cela équivaut à KRxCV01 lorsque les taux ont diminué (directionnels).

$f_{xx}(a,b) = \frac{f_x(a+h/2,b)-f_x(a-h/2,b)}{2h/2} = \frac{[f(a+h,b)-f(a,b)]-[f(a,b)-f(a-h,b)]}{h^2} = \frac{P_x+M_x}{h^2}$, cela équivaut à KRxCV01 lorsque des taux à la hausse et à la baisse sont incorporés (non directionnels).

$f_{yy}^{+}(a,b) = \frac{f_y^{+}(a,b+h/2)-f_y^{+}(a,b)}{h/2} = \frac{[f(a,b+h)-f(a,b+h/2)]-[f(a,b+h/2)-f(a,b)]}{h^2/4} = \frac{f(a,b+h)-2f(a),b+h/2)+f(a,b)}{h^2/4} = \frac{P_y-2P_{y/2}}{h^2/4}$

$f_{yy}^{-}(a,b) = \frac{f_y^{-}(a,b)-f_y^{-}(a,b-h/2)}{h/2} = \frac{[f(a,b)-f(a,b-h/2)]-[f(a,b-h/2)-f(a,b-h)]}{h^2/4} = \frac{f(a,b)-2f(a,b-\frac{h}{2})+f(a,b-h)}{h^2/4} = \frac{M_y-2M_{y/2}}{h^2/4}$

$f_{yy}(a,b) = \frac{f_x(a,b+h/2)-f_x(a,b-h/2)}{2h/2} = \frac{[f(a,b+h)-f(a,b)]-[f(a,b)-f(a,b-h)]}{h^2} = \frac{P_y+M_y}{h^2}$

$f_{xy}^{++}(a,b) = \frac{f_y^{+}(a+h,b)-f_y^{+}(a,b)}{h} = \frac{[f(a+h,b+h)-f(a+h,b)]-[f(a,b+h)-f(a,b)]}{h^2} = \frac{f(a+h,b+h)-f(a+h,b)-f(a,b+h)+f(a,b)}{h^2} = \frac{PP_{xy}-P_x-P_y}{h^2}$, cela reflète l'impact croisé du taux clé x par rapport au taux clé y lorsque les deux ont augmenté.

$f_{xy}^{+}(a,b) = \frac{f_y^{-}(a+h,b)-f_y^{-}(a,b)}{h} = \frac{[f(a+h,b)-f(a+h,b-h)]-[f(a,b)-f(a,b-h)]}{h^2} = \frac{f(a+h,b)-f(a+h,b-h)-f(a,b)+f(a,b-h)}{h^2} = \frac{P_x-PM_{xy}+M_y}{h^2}$, cela reflète l'impact croisé du taux clé x par rapport au taux clé y lorsque x a augmenté, tandis que y a diminué.

$f_{xy}^{--}(a,b) = \frac{f_y^{-}(a,b)-f_y^{-}(a-h,b)}{h} = \frac{[f(a,b)-f(a,b-h)]-[f(a-h,b)-f(a-h,b-h)]}{h^2} = \frac{f(a,b)-f(a,b-h)-f(a-h,b)+f(a-h,b-h)}{h^2} = \frac{MM_{xy}-M_x-M_y}{h^2}$, cela reflète l'impact croisé du taux clé x par rapport au taux clé y lorsque les deux ont diminué.

$f_{xy}^{+}(a,b) = \frac{f_y^{+}(a,b)-f_y^{+}(a-h,b)}{h} = \frac{[f(a,b+h)-f(a,b)]-[f(a-h,b+h)-f(a-h,b)]}{h^2} = \frac{f(a,b+h)-f(a,b)-f(a-h,b+h)+f(a-h,b)}{h^2} = \frac{P_y-MP_{xy}+M_x}{h^2}$

$f_{xy}(a,b) = \frac{f_y(a+h,b)-f_y(a-h,b)}{2h} = \frac{[f(a+h,b+h)-f(a+h,b-h)]-[f(a-h,b+h)-f(a-h,b-h)]}{4h^2} = \frac{f(a+h,b+h)-f(a+h,b-h)-f(a-h,b+h)+f(a-h,b-h)}{4h^2} = \frac{PP_{xy}PM_{xy}\text{« } M \text{ »}P_{xy}+mM_{xy}}{4h^2} = \frac{f_{xy}^{++}(a,b)+f_{xy}^{+}(a,b)+f_{xy}^{+}(a,b)+f_{xy}^{--}(a,b)}{4}$, cela reflète l'impact croisé du taux clé x par rapport au taux clé y lorsque la dérivée non directionnelle est intégrée.

$f_{yx}^{++}(a,b) = \frac{f_x^{+}(a,b+h)-f_x^{+}(a,b)}{h} = \frac{[f(a+h,b+h)-f(a,b+h)]-[f(a+h,b)-f(a,b)]}{h^2} = \frac{f(a+h,b+h)-f(a,b+h)-f(a+h,b)+f(a,b)}{h^2} = \frac{PP_{xy}-P_y-P_x}{h^2} = f_{xy}^{++}(a,b)$

$f_{yx}^{+}(a,b) = \frac{f_x^{-}(a,b+h)-f_x^{-}(a,b)}{h} = \frac{[f(a,b+h)-f(a-h,b+h)]-[f(a,b)-f(a-h,b)]}{h^2} = \frac{f(a,b+h)-f(a-h,b+h)-f(a,b)+f(a-h,b)}{h^2} = \frac{P_y-MP_{xy}+M_x}{h^2} = f_{xy}^{+}(a,b)$

$f_{yx}^{--}(a,b) = \frac{f_x^{-}(a,b)-f_x^{-}(a,b-h)}{h} = \frac{[f(a,b)-f(a-h,b)]-[f(a,b-h)-f(a-h,b-h)]}{h^2} = \frac{f(a,b)-f(a-h,b)-f(a,b-h)+f(a-h,b-h)}{h^2} = \frac{MM_{xy}-M_x-M_y}{h^2} = f_{xy}^{--}(a,b)$

$f_{yx}^{+}(a,b) = \frac{f_x^{+}(a,b)-f_x^{+}(a,b-h)}{h} = \frac{[f(a+h,b)-f(a,b)]-[f(a+h,b-h)-f(a,b-h)]}{h^2} = \frac{f(a+h,b)-f(a,b)-f(a+h,b-h)+f(a,b-h)}{h^2} = \frac{P_x-PM_{xy}+M_y}{h^2} = f_{xy}^{+}(a,b)$

=

$f((x,y)) \approx\ f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)\ + \frac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2$, il s’agit de l’expansion de la série de Taylor du deuxième ordre avec deux variables.